Propagación de Errores

- Propagación de errores.
- Propagación de errores en sumas y diferencias.
- Propagación de errores en productos.
- Propagación de errores en cocientes.
- Error del producto por una constante.
- Error de una potencia.
- Error en funciones de una variable.
- Error en funciones de varias variables.
- Errores independientes y aleatorios
- Formula general para la propagación de errores.
    - ✓ Medidas independientes.
    - ✓ Problema semidirecto.
    - ✓ Problema inverso.

Propagación de errores

Medidas indirectas.- Magnitudes que se calculan a partir de los valores encontrados en las medidas de otras magnitudes.

- Conocemos $x \pm \delta x$, $y \pm \delta y$,...
- Calculamos $z = f(x, y, ...)$
- ¿Cuál es el error de z?

Propagación de errores.- Conjunto de reglas que permiten asignar un error a *z*, conocidas las incertidumbres de *x* e *y*, ...

- Permiten asignar un error al resultado final.
- Indica la importancia relativa de las diferentes medidas directas.
- Planificación del experimento.

Hipótesis de partida

- Medidas dependientes.- Hipótesis pesimista. Siempre en la situación más desfavorable. Conjunto de reglas prácticas.

- Medidas independientes.- Errores cuadráticos medios. Fórmula general de propagación de errores.

Propagación de errores en sumas y diferencias

Datos iniciales: $x \pm \delta x$ $\quad y \pm \delta y$

Sea su suma $q = x + y$ y su diferencia $q = x - y$

☛ ¿Cuál es la incertidumbre, δq ?

	Suma	Diferencia
Valor máximo de q	$q_{\max} = x + \delta x + y + \delta y = $ $= x + y + (\delta x + \delta y)$	$q_{\max} = x + \delta x - (y - \delta y) = $ $= x - y + (\delta x + \delta y)$
Valor mínimo de q	$q_{\min} = x - \delta x + y - \delta y = $ $= x + y - (\delta x + \delta y)$	$q_{\min} = x - \delta x - (y + \delta y) = $ $= x - y - (\delta x + \delta y)$

El error absoluto de la suma y de la diferencia de dos o mas magnitudes es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes:

$$q = x \pm y \quad \Rightarrow \quad \delta q \approx \delta x + \delta y$$

Ejemplo:

☛En un experimento se introducen dos líquidos en un matraz y se quiere hallar la masa total del líquido. Se conocen:

M_1 = Masa del matraz 1 + contenido = 540 ± 10 g

m_1 = Masa del matraz 1 = 72 ± 1 g

M_2 = Masa del matraz 2 + contenido = 940 ± 20 g

M_2 = Masa del matraz 2 = 97 ± 1 g

La masa de líquido será:

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311\ g$$

Su error:

$$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32\ g$$

El resultado se expresará:

$$M = 1310 \pm 30\ g$$

Propagación de errores en productos

Datos iniciales: $x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|}\right)$ $\quad y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|}\right)$

Sea su producto $\quad q = xy$

☛¿Cuál es la incertidumbre, δq ?

Producto

Valor **máximo** de q

$$q_{\max} = x\left(1+\frac{\delta x}{|x|}\right) y\left(1+\frac{\delta y}{|y|}\right) \overset{\frac{\delta x}{|x|}\frac{\delta y}{|y|} << }{\underset{\downarrow}{\cong}} xy\left(1+\frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}\right)$$

Valor **mínimo** de q

$$q_{\min} = x\left(1-\frac{\delta x}{|x|}\right) y\left(1-\frac{\delta y}{|y|}\right) \overset{\frac{\delta x}{|x|}\frac{\delta y}{|y|} << }{\underset{\downarrow}{\cong}} xy\left(1-\left[\frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}\right]\right)$$

El error relativo del producto es igual a la suma de los errores relativos:

$$q = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}$$

Propagación de errores en cocientes

Datos iniciales: $x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|}\right)$ $\quad y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|}\right)$

☛Sea su producto $q = \frac{x}{y}$ ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

Cociente

Valor **máximo** de q

$$q_{max} = \frac{x\left(1+\frac{\delta x}{|x|}\right)}{y\left(1-\frac{\delta y}{|y|}\right)} \underset{\downarrow}{\overset{\frac{1}{1-\varepsilon}=1+\varepsilon}{\cong}} \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta x}{|x|}\right)\left(1+\frac{\delta y}{|y|}\right) \underset{\downarrow}{\overset{\frac{\delta x}{|x|}\frac{\delta y}{|y|}<<}{\cong}}$$

$$\cong \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}\right)$$

Valor **mínimo** de q

$$q_{min} = \frac{x\left(1-\frac{\delta x}{|x|}\right)}{y\left(1+\frac{\delta y}{|y|}\right)} \underset{\downarrow}{\overset{\frac{1}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon}{\cong}} \frac{x}{y}\left(1-\frac{\delta x}{|x|}\right)\left(1-\frac{\delta y}{|y|}\right) \underset{\downarrow}{\overset{\frac{\delta x}{|x|}\frac{\delta y}{|y|}<<}{\cong}}$$

$$\cong \frac{x}{y}\left(1-\left[\frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}\right]\right)$$

El error relativo del cociente es la suma de los errores relativos:

$$q = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}$$

Ejemplo:

☛Para medir la altura de un árbol, L, se mide la longitud de su sombra, L_1, la altura de un objeto de referencia, L_2, y la longitud de su sombra, L_3. Por semejanza:

$$L = L_1 \frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan:

$L_1 = 200 \pm 2$ cm, $L_2 = 100.0 \pm 0.4$ cm, $L_3 = 10.3 \pm 0.2$ cm

Por tanto $$L = 200 \times \frac{100}{10} = 2000 \text{ cm}$$

Su error será

$$\frac{\delta L}{|L|} \approx \frac{\delta L_1}{|L_1|} + \frac{\delta L_2}{|L_2|} + \frac{\delta L_3}{|L_3|} = \frac{2}{200} + \frac{0.4}{100} + \frac{0.2}{10.3} =$$

$$= (1 + 0.4 + 2)\% = 3.4\% \rightarrow \delta L = \frac{3.4}{100} \times 2000 = 68$$

$$\boxed{L = 2000 \pm 70 \text{ cm}}$$

Error del producto por una constante

Datos iniciales: $x \pm \delta x$ Sea $q = Ax$

☞ ¿Cuál es la incertidumbre, δq ?

Aplicando la regla del producto

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta A}{|A|} + \frac{\delta x}{|x|} = \frac{\delta x}{|x|} \quad \Rightarrow \quad \delta q = |A| \delta x$$

El error absoluto del producto de una constante por una magnitud es igual al producto de la constante por el error absoluto de la magnitud

$$\delta q = |A| \delta x$$

Error de una potencia

Datos iniciales: $x \pm \delta x$ Sea $q = x^n = x \cdot x \cdots x$

☞ ¿Cuál es la incertidumbre, δq ?

Aplicando la regla del producto

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta x}{|x|} + \cdots + \frac{\delta x}{|x|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$

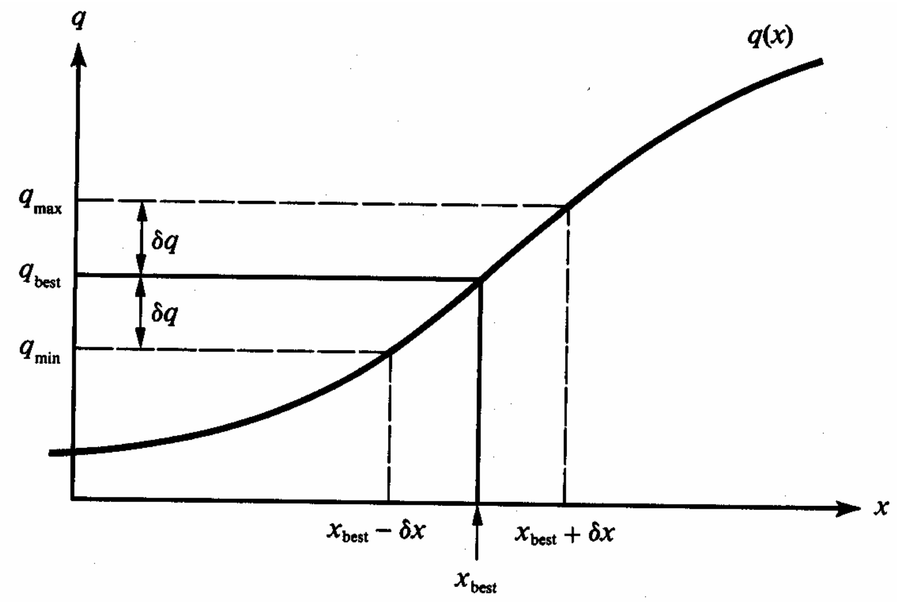
El error relativo de una potencia es el producto de la potencia por el error relativo de la magnitud.

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$

Error en funciones de una variable

Datos iniciales: $x \pm \delta x$ Sea $q = f(x)$ una función cualquiera

☞ ¿Cuál es la incertidumbre, δq ?



Gráficamente

$$\delta q = \frac{|q_{max} - q_{min}|}{2}$$

Analíticamente

$$\delta q = f(x+\delta x) - f(x) = \frac{df(x)}{dx}\delta x$$

Si x se mide con un error δx y se utiliza para calcular $q = f(x)$, el error absoluto de q viene dado por :

$$\delta q = \left|\frac{df(x)}{dx}\right|\delta x$$

Error en funciones de varias variables

Las reglas para el cálculo de errores que hemos visto se pueden deducir de una fórmula más general que nos permite resolver casos más complicados.

Sean las medidas x, y con errores $\delta x, \delta y$ usadas para calcular:

$$q = f(x, y)$$

Mediante un desarrollo en serie para el caso de varias variables:

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \cdots$$

Con lo que:

$$\delta q = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y$$

Ejemplos:

Función	**Errores**	**Error**
$q = kx$	$x \pm \delta(x)$	$\delta(q) = k\delta(x)$
$q = \pm x \pm y \pm \cdots$	$x \pm \delta(x)$ $y \pm \delta(y)$	$\delta(q) \approx \delta(x) + \delta(y)$
$q = kx^{\alpha} y^{\beta} \cdots$	$x \pm \delta(x)$ $y \pm \delta(y)$	$\frac{\delta q}{\lvert z\rvert} \approx \alpha \frac{\delta x}{\lvert x\rvert} + \beta \frac{\delta y}{\lvert y\rvert}$

Errores independientes y aleatorios

Las reglas anteriores suponen una sobreestimación del error, puesto que siempre nos situamos en el caso más desfavorable.

Ejemplo: error de la suma

Dados $x \pm \delta x$, $y \pm \delta y$ el error de la suma $q = x + y$ viene dado por $\delta z \approx \delta x + \delta y$

Sin embargo:

El máximo valor posible de q, $q \pm \delta q$ se alcanza cuando nos equivocamos simultáneamente δx en x y δy en y, lo que es altamente improbable si las medidas son aleatorias e independientes.

Una sobreestimación (o subestimación) de x no viene necesariamente acompañada de una sobreestimación (o subestimación) de y.

Si las medidas son independientes

La hipótesis pesimista es exagerada.
Los errores se cancelan parcialmente.
Los errores se propagan cuadráticamente.

Fórmula general para la propagación de errores

- **Medidas independientes**

Sean las medidas de $x, y, \cdots, w$ con errores $\delta x, \delta y, \cdots, \delta w$ usadas para calcular :

$$q = f(x, y, \cdots, w)$$

Si los errores son independientes y aleatorios, entonces el error de z es la suma en cuadratura

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\delta w\right)^2}$$

Ejemplos:

Función	Errores	Error
$q = kx$	$x \pm \delta(x)$	$\delta(q) = k\delta(x)$
$q = \pm x \pm y \pm \cdots$	$x \pm \delta(x)$ $y \pm \delta(y)$	$\delta(q) = \sqrt{[\delta(x)]^2 + [\delta(y)]^2 + \cdots}$
$q = kx^{\alpha} y^{\beta} \cdots$	$x \pm \delta(x)$ $y \pm \delta(y)$	$\frac{\delta q}{\lvert q \rvert} = \sqrt{\left[\alpha \frac{\delta x}{\lvert x \rvert}\right]^2 + \left[\beta \frac{\delta y}{\lvert y \rvert}\right]^2 + \cdots}$

- ## Problema semidirecto

$z = f(x, y, \cdots, m, n, \cdots)$	Errores conocidos	$\varepsilon(x), \varepsilon(y), \cdots$
	Errores desconocidos	$\varepsilon(m), \varepsilon(n), \cdots$

✗ ¿Cuál ha de ser $\varepsilon(m), \varepsilon(n), \cdots$ para que no influyan mucho en $\varepsilon(z)$?

$$\varepsilon^2(z) = \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\varepsilon(y)\right]^2 + \cdots -}_{A} + \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2}_{kT} \cdots$$

$$\varepsilon^2(z) = A + kT \to kT = 0.2A$$

$$\varepsilon(z) = 1.1\sqrt{A}$$

$$T = 0.2\frac{A}{k}$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 = T \to \varepsilon(m)$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2 = T \to \varepsilon(n)$$

$$\vdots$$

- ## Problema inverso

$z = f(x, y, \cdots, m, n, \cdots)$	Error deseado $\varepsilon(z)$
	Errores conocidos $\varepsilon(x), \varepsilon(y), \cdots$
	Errores desconocidos $\varepsilon(m), \varepsilon(n), \cdots$

✗ ¿Cuál ha de ser $\varepsilon(m), \varepsilon(n), \cdots$ para que $\varepsilon(z)$ sea el deseado?

$$\varepsilon^2(z) = \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\varepsilon(y)\right]^2 + \cdots}_{A} + \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2}_{kT} \cdots$$

$$\varepsilon^2(z) = A + kT \rightarrow T = \frac{\varepsilon^2(z) - A}{k}$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 = T \rightarrow \varepsilon(m)$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2 = T \rightarrow \varepsilon(n)$$

$$\vdots$$